Симплектическое интегрирование в задачах динамической астрономии.

Емельяненко В.В.,
Чегодаева Е.А.

Кафедра вычислительной и небесной механики,

ЮУрГУ

Теория симплектических интеграторов

Канонические уравнения движения для гамильтониана *H*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}_\mathrm{i}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial \vec{p}_i}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}_\mathrm{i}}{\mathrm{dt}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \vec{x}_i}. \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{q}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}_i} \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} - \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{p}_i} \frac{\partial H}{\partial \vec{x}_i} \right) \equiv \{q, H\} \equiv Fq,$$

$$\vec{q}(t) = e^{\tau F} \vec{q}(t - \tau)$$

Для гамильтониана $H = H_A + \varepsilon H_B,$ где $\varepsilon << 1$

$$\vec{q}(t) = e^{\tau(A+B)}\vec{q}(t-\tau),$$

Интегратор первого порядка

$$\vec{q}(t) = e^{\tau A} e^{\tau B}\vec{q}(t-\tau),$$

где τ - шаг интегрирования.

$$H_{integr} = H + H_{err}(\tau^p)$$

где *p* – порядок интегратора.

$$H_{integ} = H + \frac{\tau}{2}\left\{H_B, H_A\right\} + O\left(\tau^2\right)$$

Схема интегратора второго порядка имеет вид

$$S_2 = e^{\tau B/2} e^{\tau A} e^{\tau B/2}$$

$$H_{integr} = H + \frac{\varepsilon\tau^2}{12}\left\{H_A, \left\{H_A, H_B\right\}\right\} - \frac{\varepsilon^2\tau^2}{24}\left\{\left\{H_A, H_B\right\}, H_B\right\} + O(\varepsilon\tau^4)$$

Схемы для интеграторов более высокого порядка

$$S_4(\tau) = S_2(x_1\tau) S_2(x_0\tau) S_2(x_1\tau),$$

$$S_6(\tau) = S_4(y_1\tau) S_4(y_0\tau) S_4(y_1\tau),$$

где x_0, x_1, y_0, y_1 - константы.

Метод симплектического интегрирования для кометных орбит

$$H = H_{kepl} - H_{pert}$$

$$H_{kepl} = \frac{p^2}{2m} - \frac{\mu}{r} \qquad H_{pert} = R(q_1, q_2, q_3, t)$$

Интегрирование массивных тел

$$H_{kepl} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{p_i'^2}{2m_i} - \frac{k^2 m_i m_0}{r_i'} \right)$$

$$H_{pert} = \sum_{i=1}^{n-1} k^2 m_i m_0 \left(\frac{1}{r_i'} - \frac{1}{r_{i0}} \right) - \sum_{0<i<j} \frac{k^2 m_i m_j}{r_{ij}}$$

Интегрирование частиц

$$H_{kepl} = \frac{\vec{v}_m^{\ 2}}{2} - \frac{k^2\left(1+\sum_{i=1}^{n} m_i\right)}{r},$$

$$H_{inter} = \sum_{i=0}^{n} k^2 m_i \left(\frac{1}{|\vec{q}_m - \vec{q}_i(t)|} - \frac{1}{r}\right).$$

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1,$$

$$\Gamma_0 = \ln\frac{K_0}{r}, \qquad \Gamma_1 = -\ln\frac{K_1}{r}.$$

$$K_0 = r\left(H_{kepl} + p_4 + B_0 + \frac{B_1}{r}\right),$$

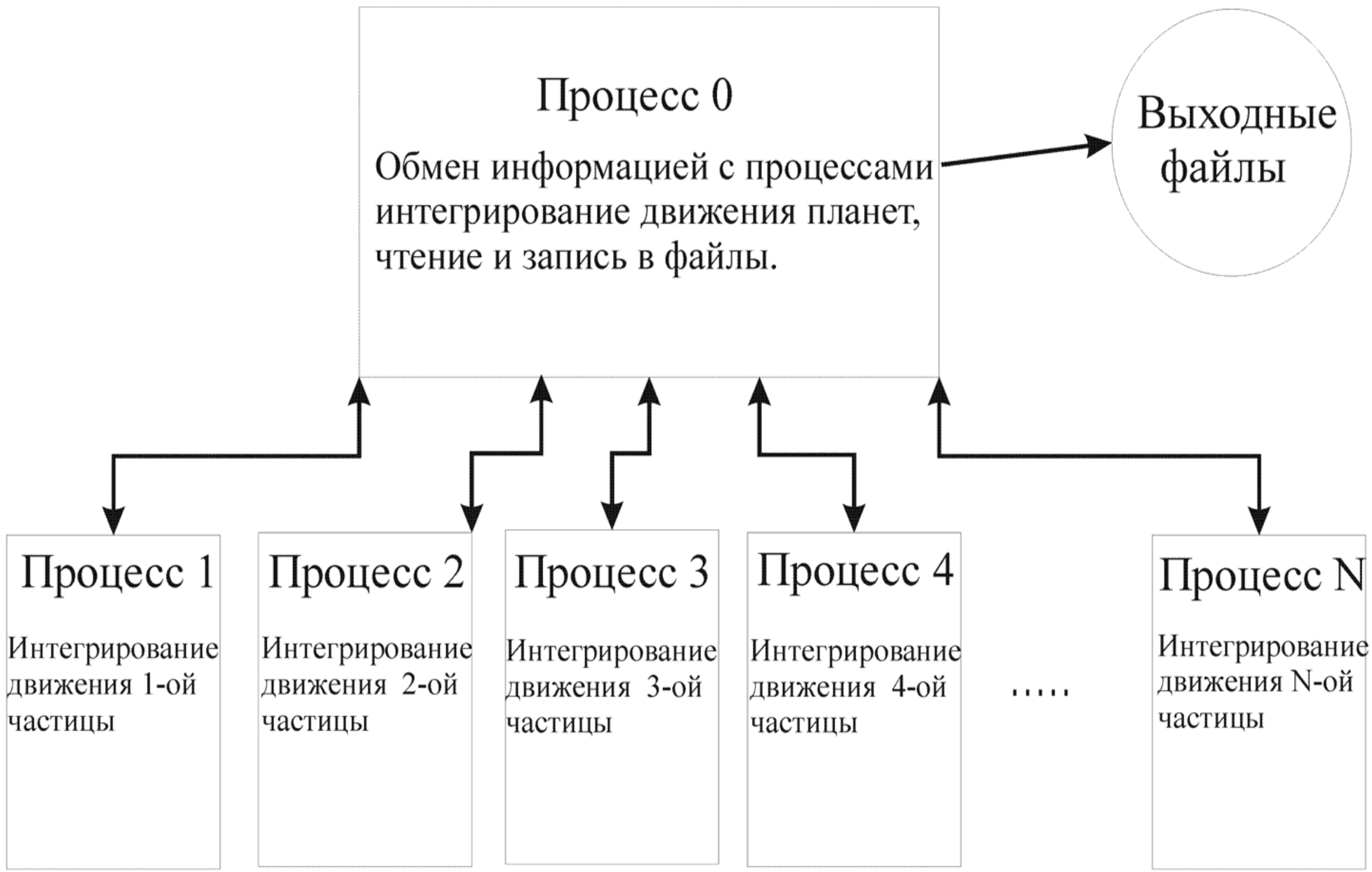
$$K_1 = r\left(H_{\text{int}} + B_0 + \frac{B_1}{r}\right).$$

Канонические уравнения движения

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{q}_m}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\partial\Gamma}{\partial\vec{\mathrm{v}}_m}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}_m}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\partial\Gamma}{\partial\vec{q}_m}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q_4}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\partial\Gamma}{\partial t}, \\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\partial\Gamma}{\partial q_4}, \end{cases}$$

где *ds* – новая независимая переменная

$$\mathrm{d}s = K_1\mathrm{d}\tau = K_0\mathrm{d}\tau = \frac{K_0}{r}\mathrm{d}t.$$


Процесс 0
Обмен информацией с процессами интегрирование движения планет, чтение и запись в файлы.
Выходные файлы
Процесс 1
Интегрирование движения 1-ой частицы
Процесс 2
Интегрирование движения 2-ой частицы
Процесс 3
Интегрирование движения 3-ой частицы
Процесс 4
Интегрирование движения 4-ой частицы
…..
Процесс N
Интегрирование движения N-ой частицы

Результаты численного эксперимента

4 внешних планеты с шагом интегрирования 365 дней

10 транснептунных объектов

a > 39 а.е.

шаг интегрирования переменный

T = 100 млн. лет

Cpu Time ≈ 1500 сек.